

13. Demostrar que $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, si W_1, W_2 son subesp. de V .
 Retornamos una línea antes de ... en 12.

$$\text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$$

$$\text{Tenemos } W_1 \cup W_2 = \{w \in V : w \in W_1 \vee w \in W_2\}$$

$$\Rightarrow w = \alpha \cdot u \vee w = \beta \cdot v$$

Tres casos

$$\textcircled{1} w = \alpha \cdot u \quad \textcircled{2} w = \beta \cdot v \quad \textcircled{3} w = \alpha \cdot u = \beta \cdot v$$

por lo tanto a w lo generan todos los elementos de u y de v , sin embargo

$$\text{si al momento de evaluar } \alpha \cdot u - \beta \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$$

$$\wedge \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2) = \emptyset$$

$$\text{pero si } \exists \alpha_i, \beta_j \neq 0, i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m \quad \text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$$

$$\wedge \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2) \neq \emptyset$$

$$\text{En cualquier caso, } \text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$$

$$\Rightarrow \text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1 \cup W_2)$$

$$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

14. Determinar una base para cada subespacio de \mathbb{R}^4 .

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_1) = x_1(1, 1, 1, 1), x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\therefore F = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 \wedge x_3 = x_4\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 0, x_3, x_3) \\ = x_1(1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 1); x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow G = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_4) = (x_1, x_1, x_1, 0) + (0, 0, 0, x_4) = x_1(1, 1, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1); x_1, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\therefore H = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)$$

$$\therefore K = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

B. Describa el espacio generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(1, 0, 1, -1); (2, -1, 0, 1); (0, 0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = \text{gen}(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(2, -1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ -1 & 0 & 0 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & v_4 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + v_2 \\ 0 & -1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array} \end{array}$$

Tenemos que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_4 = v_1 + 2v_2$.

$\text{gen}(A) = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) : v_1 + v_2 = v_3 \wedge v_1 + 2v_2 = v_4\}$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_1 + v_2, v_1 + 2v_2) = (v_1, 0, v_1, -v_1) + (0, v_2, v_2, 2v_2) = v_1(1, 0, 1, -1) + v_2(0, 1, 1, 2)$$

$\text{gen}(A) = \langle (1, 0, 1, -1); (0, 1, 1, 2) \rangle$

$\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$\text{gen}(A) = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 2) \rangle = \langle (-1, 0, -1, 1), (0, -1, -1, 2) \rangle$

B. Describa el espacio generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(1, 0, 1, -1); (2, -1, 0, 1); (0, 0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = \text{gen}(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = \alpha_1(1, 0, 1, -1) + \alpha_2(2, -1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ -1 & 0 & 0 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & v_4 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + v_2 \\ 0 & -1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array} \end{array}$$

Tenemos que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_4 = v_1 + 2v_2$.

$\text{gen}(A) = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) : v_1 + v_2 = v_3 \wedge v_1 + 2v_2 = v_4\}$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_1 + v_2, v_1 + 2v_2) = (v_1, 0, v_1, -v_1) + (0, v_2, v_2, 2v_2) = v_1(1, 0, 1, -1) + v_2(0, 1, 1, 2)$$

$\text{gen}(A) = \langle (1, 0, 1, -1); (0, 1, 1, 2) \rangle$

$\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$\text{gen}(A) = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 2) \rangle = \langle (-1, 0, -1, 1), (0, -1, -1, 2) \rangle$

$$b. B = \{1+x, x^2-x^3\} \in P_3$$

Sea $\text{gen}(B)$ el esp. vec. generado por B , para Todo $p \in \text{gen}(B)$ se tiene que

$$p = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^2-x^3)$$

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)x^3 + (-\alpha_2)x^2 + (\alpha_1)x + \alpha_0$$

$$\rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 \quad \alpha_3 = -\alpha_2$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_0 \quad \text{gen}(B) = \{p \in P_3 : p = ax^3 - ax^2 + bx + b; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_0 = \alpha_1$$

Probamos la linealidad de B

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^3-x^2) = 0 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 = 0$$

$\therefore B$ es L.I.

$$\alpha_2 x^3 - \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 = 0$$

B es base de $\text{gen}(B)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\therefore \dim(\text{gen}(B)) = 2$$

$$\text{gen}(B) = \langle x^3 - x^2, 1+x \rangle = \langle x^3 - x^2, -1-x \rangle$$

8. Si $\beta = \{u, v, w\} \in V$, es un conjunto L.I., determinar la D.L. o I.L. de

$$\beta = \{\alpha u + \beta v, \lambda v - \alpha w, \beta w + \lambda v\}, \text{ para } \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Sabemos que } \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\text{Queremos probar } b_1(\alpha u + \beta v) + b_2(\lambda v - \alpha w) + b_3(\beta w + \lambda v) = 0 \rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

$$\rightarrow b_1 \alpha u + (b_1 \beta + b_2 \lambda + b_3 \lambda) v + (b_3 \beta - b_2 \alpha) w = 0$$

$$\exists b_i \neq 0, i=1,2,3$$

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0$$

$$b_1 \alpha = 0 \wedge b_1 \beta + b_2 \lambda + b_3 \lambda = 0 \wedge b_3 \beta - b_2 \alpha = 0$$

$$(\alpha = 0 \vee b_1 = 0) \wedge \alpha b_1 \beta + \alpha b_2 \lambda + \alpha b_3 \lambda = 0 \quad \beta b_3 = \alpha b_2$$

$$\beta b_3 \lambda + \alpha b_2 \lambda = 0$$

$$\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda b_3 = 0 \vee \alpha + \beta = 0)$$

$$\text{Suponemos } \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow b_1 = 0 \quad \text{Si } b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 0 \quad \therefore \text{Existe al caso donde } b_2 \neq 0 \vee b_3 \neq 0$$

$$\text{Si } \alpha = -\beta \rightarrow b_2 + b_3 = 0$$

$$\text{Nota: Si } \alpha = -\beta, B \text{ es L.D.}$$

$$\text{Si } \alpha \neq -\beta, B \text{ es L.I.}$$

10. Si: $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ es L.I. Determinar la linealidad de
 $A = \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$

Sabemos $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Probamos $\beta_1 v_1 + \beta_2 (v_2 - v_1) + \dots + \beta_m (v_m - v_1) = 0$

$$(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots - \beta_m) v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = 0$$

$$\rightarrow (\beta_1 - \sum_{i=2}^m \beta_i) = 0 \wedge \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m = 0 \quad \therefore \beta_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\beta_1 = \sum_{i=2}^m \beta_i = \sum_{i=2}^m 0 = 0$$

Rpta: A es L.I.

23. Demostrar que:

a. $\langle (1, 3, 5) \rangle = \langle (2, 6, 10) \rangle$

Sean los subespacios generados $A = \langle (1, 3, 5) \rangle$ y $B = \langle (2, 6, 10) \rangle$ y los subespacios $\text{gen}(A)$ y $\text{gen}(B)$.

$$\rightarrow \text{gen}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha(1, 3, 5), \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \text{gen}(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta(2, 6, 10), \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$y = (2\beta)(1, 3, 5)$$

ya sigue siendo \mathbb{R}

$$\forall x \in \text{gen}(A) \wedge y \in \text{gen}(B) : x = \alpha(1, 3, 5) = y = (2\beta)(1, 3, 5)$$

$$x = y \quad \text{pues solo es necesario que } \alpha = 2\beta$$

$$\rightarrow \text{gen}(A) = \text{gen}(B)$$

$$\langle (1, 3, 5) \rangle = \langle (2, 6, 10) \rangle$$

b. $\langle (2, -1, 6), (-3, 4, 1) \rangle = \langle (-1, 3, 7), (8, -4, 24) \rangle$

Sean $A = \langle (2, -1, 6), (-3, 4, 1) \rangle$, $B = \langle (-1, 3, 7), (8, -4, 24) \rangle$ y $\text{gen}(A)$, $\text{gen}(B)$ sus subespacios.

$$\text{gen}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(2, -1, 6) + \alpha_2(-3, 4, 1) = x; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \text{gen}(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta_1(-1, 3, 7) + \beta_2(8, -4, 24)\}$$

En $\text{gen}(B)$, $y = \beta_1(-1, 3, 7) + \beta_2(8, -4, 24)$

$$y = \beta_1(-1, 3, 7) + (4\beta_2 + \beta_1)(2, -1, 6)$$

$$y = \beta_1(-3, 4, 1) + (4\beta_2 + \beta_1)(2, -1, 6)$$

$$x = \alpha_1(2, -1, 6) + \alpha_2(-3, 4, 1)$$

Haciendo $x_2 = \beta_1$ y $\alpha_1 = 4\beta_2 + \beta_1$ por lo tanto habrán x y y iguales $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \text{gen}(A) = \text{gen}(B) \quad \langle (2, -1, 6), (-3, 4, 1) \rangle = \langle (-1, 3, 7), (8, -4, 24) \rangle$$